

MAI 1 – domácí úkol ze cvičení 8 (druhá část).

1. Vypočítejte následující limity funkce, nebo ukažte, že funkce limitu a daném bodě nemají:

- a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)^{x^2}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$;
- c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 + 1) \cdot (\log(n^2 - 4) - 2 \log n)$ nebo $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{a}{n} \right)^{n^2}$ ($n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R} - \{0\}$);
(návod: užiďte Heineho větu)

2. a) Ve cvičení 7. jsme ukázali, že funkce f , definovaná

$$f(x) = \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right) \quad \text{pro } |x| < 1, \quad f(x) = 0 \quad \text{pro } |x| \geq 1,$$

je spojitá v $\mathbb{R}$. Ukažte, že i její derivace f' je spojitá v $\mathbb{R}$.

nebo

b) Funkce f je definována:

$$f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x}, \quad \text{pokud } x \neq 0 \quad \text{a} \quad f(0) = 0.$$

Ukažte, že f je spojitá v $\mathbb{R}$ a dále zjistěte, pro která $x \in \mathbb{R}$ existuje derivace, případně jednostranné derivace $f'_+(x)$ nebo $f'_-(x)$. Tyto derivace spočítejte.

nebo

c) Zkuste spočítat derivace ve „špatných“ bodech z D_f ještě jednou užitím věty 8.24 (z přednášky 8.) u funkcí z domácího úkolu 7.:

$$(i) \quad f(x) = \sqrt{\arctg(x-1)^2} \quad \text{nebo} \quad (ii) \quad f(x) = \cos \sqrt{\frac{x}{1-x^2}}.$$

3. Zkuste vyšetřit průběh aspoň jedné z funkcí:

$$a) \quad f(x) = \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^2; \quad b) \quad f(x) = \frac{|2x-1|}{(x-1)^2}; \quad c) \quad f(x) = \arctg \left(\frac{x-1}{x+1} \right); \quad d) \quad (x-2) \cdot e^{-\frac{1}{x}}.$$

Návod:

Najděte její definiční obor, vyšetřete, zda funkce je lichá nebo sudá, najděte průsečíky s osami, pokud existují, intervaly, kde je funkce kladná, resp. záporná.

Vyšetřete spojitost funkce f a limity v krajních bodech – to už vám pomůže udělat si „odhad“ grafu.

Vypočítejte první derivaci, vyšetřete monotonii, lokální a globální extrémy funkce f .

Vypočítejte druhou derivaci. Najděte intervaly, na kterých je funkce konvexní, resp. konkávní.

Pokud má funkce f inflexní body, určete je.

Načrtněte graf funkce f .